ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2017

Α΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 11/11/2017 *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή του Α:

$$A=\frac{1}{2017}+\frac{2}{2017}+\frac{3}{2017}+\cdots+\frac{2016}{2017}+\frac{2017}{2017}$$

Προτεινόμενη Λύση

$$A=\left(\frac{1}{2017}+\frac{2016}{2017}\right)+\left(\frac{2}{2017}+\frac{2015}{2017}\right)+\left(\frac{3}{2017}+\frac{2014}{2017}\right)+\mathrm{L}\ +\frac{2017}{2017}$$

$$A=1008\mathrm{x}1+1=1009$$

Πρόβλημα 2

Ο μ είναι περιττός πρώτος αριθμός και διαιρέτης του μέγιστου κοινού διαιρέτη των αριθμών 24, 42 και 54.

α) Να βρείτε την τιμή του μ.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=\dfrac{\left(\mu-\dfrac{\mu}{2}\right)}{\dfrac{\mu}{3}+1}\div\dfrac{5-\mu}{\mu}-\dfrac{1}{8}$.

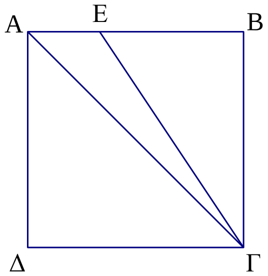
Προτεινόμενη Λύση

α) Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των αριθμών 24, 42, 54 είναι το 6. Ο μόνος περιττός πρώτος αριθμός που είναι διαιρέτης του 6 είναι το 3. Άρα $\mu = 3$.

β) Αν $\mu = 3$ τότε $A = \dfrac{\left(3-\dfrac{3}{2}\right)}{\dfrac{3}{3}+1} \div \dfrac{5-3}{3} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{\left(\dfrac{6-3}{2}\right)}{2} \div \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{\left(\dfrac{3}{2}\right)}{2} x \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{3}{4} x \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{9}{8} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{8}{8} = 1$

Πρόβλημα 3

Στο πιο κάτω σχήμα το *Ε* είναι σημείο της πλευρά *ΑΒ* του τετραγώνου *ΑΒΓΔ* τέτοιο ώστε *ΑΕ* = 12 cm. Αν το εμβαδόν του τριγώνου *ΑΕΓ* είναι 216 cm^2 να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου *ΕΒΓ*.



Προτεινόμενη Λύση

$$E_{ΑΕΓ} = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2} \Rightarrow 216 = \frac{12 \cdot (ΒΓ)}{2} \Rightarrow 216 = 6 \cdot (ΒΓ) \Rightarrow (ΒΓ) = 36cm$$

Άρα η πλευρά του τετραγώνου είναι 36 cm

Άρα $(ΕΒ) = 36 - 12 = 24cm$.

$$E_{ΕΒΓ} = \frac{24 \cdot 36}{2} = 12 \cdot 36 = 432\,cm^2$$

Πρόβλημα 4

Ο Αντρέας, ο Βασίλης, ο Κώστας, η Δέσποινα και η Ελένη μοιράζονται ένα μπουκάλι χυμό πορτοκαλιού. Ο Αντρέας παίρνει πρώτος το μπουκάλι, και καθώς βάζει χυμό στο ποτήρι του, χύνει έξω 10ml χυμού. Όταν το ποτήρι του και το μπουκάλι έχουν την ίδια ποσότητα χυμού, δίνει το μπουκάλι στον επόμενο. Ομοίως, ο Βασίλης, ο Κώστας, η Δέσποινα και η Ελένη χύνουν έξω 10ml χυμού καθώς βάζουν τη δική τους μερίδα, και ο κάθε ένας σταματά να βάζει χυμό όταν το ποτήρι του και το μπουκάλι έχουν την ίδια ποσότητα χυμού. Αν κάθε άτομο βάζει χυμό στο ποτήρι του με τη σειρά και στο τέλος παραμένει 10ml χυμού στη μπουκάλα, να βρείτε πόσα ml χυμού ήταν αρχικά στο μπουκάλι.

Προτεινόμενη Λύση

Αν ξεκινήσουμε από το τέλος τοτε η Ελένη βάζει 10ml, η Δέσποινα 30ml ($2 \times 10 + 10$),
ο Κώστας 70ml ($2 \times 30 + 10$), ο Βασίλης 150ml ($2 \times 70 + 10$) και ο Αντρέας 310ml ($2 \times 150 + 10$)
και άρα η μπουκάλα έχει 630ml ($2 \times 310 + 10$).

	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ **ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ** **ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2017** **Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ** *Ημερομηνία: 11/11/2017* *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

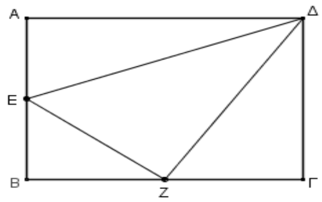
ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Στο διπλανό σχήμα το $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο. Το Z είναι το μέσο της $ΒΓ$ και το $Ε$ το μέσο της $ΑΒ$. Αν η πλευρά $ΒΓ$ έχει μήκος 16cm και το $ΕΖ$ έχει μήκος 10cm να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $ΔΕΖ$.



Προτεινόμενη Λύση

$ΒΓ = 16\ cm \Longrightarrow ΒΖ = 8\ cm$
$ΕΖ = 10\ cm$
Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα βρίσκουμε $ΒΕ = 6cm$.
Άρα $ΑΒ = 12\ cm$.
$E_{ΑΒΓΔ} = 12 \cdot 16 = 192\ cm^2$
$$E_{ΑΔΕ} = \frac{6 \cdot 16}{2} = 48\ cm^2$$
$$E_{ΕΒΖ} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24\ cm^2$$
$$E_{ΔΖΓ} = \frac{12 \cdot 8}{2} = 48\ cm^2$$
Άρα
$E_{ΔΕΖ} = 192 - 48 - 24 - 48 = 72\ cm^2$

Πρόβλημα 2

Ο Αντρέας, ο Βασίλης , ο Κώστας, η Δέσποινα και η Ελένη μοιράζονται ένα μπουκάλι χυμό πορτοκαλιού. Ο Αντρέας παίρνει πρώτος το μπουκάλι, και καθώς βάζει χυμό στο ποτήρι του, χύνει έξω 10ml χυμού. Όταν το ποτήρι του και το μπουκάλι έχουν την ίδια ποσότητα χυμού, δίνει το μπουκάλι στον επόμενο. Ομοίως, ο Βασίλης, ο Κώστας, η Δέσποινα και η Ελένη χύνουν έξω 10ml χυμού καθώς βάζουν τη δική τους μερίδα, και ο κάθε ένας σταματά να βάζει χύμο όταν το ποτήρι του και το μπουκάλι έχουν την ίδια ποσότητα χυμού. Αν κάθε άτομο βάζει χυμό στο ποτήρι του με τη σειρά και στο τέλος παραμένει 10ml χυμού στη μπουκάλα, να βρείτε πόσα ml χυμού ήταν αρχικά στο μπουκάλι.

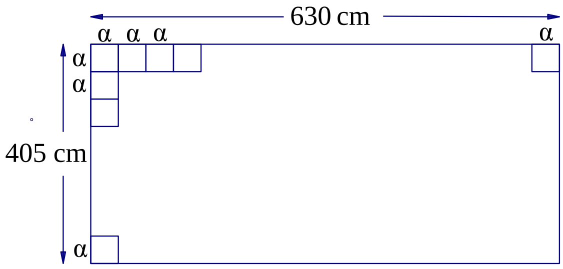
Προτεινόμενη Λύση

Αν ξεκινήσουμε από το τέλος τοτε η Ελένη βάζει 10ml, η Δέσποινα 30ml ($2\times10+10$),
ο Κώστας 70ml ($2\times30+10$), ο Βασίλης 150ml ($2\times70+10$) και ο Αντρέας 310ml ($2\times150+10$)
και άρα η μπουκάλα έχει 630ml ($2\times310+10$).

Πρόβλημα 3

Το πάτωμα μιας αίθουσας είναι ορθογώνιο με διαστάσεις 6,30 m και 4,05 m. Θέλουμε να το καλύψουμε με τετράγωνα πλακάκια όλα ίσα μεταξύ τους με πλευρά α cm, α φυσικός αριθμός. Ποιος είναι ο μικρότερος αριθμός πλακακιών που μπορεί να τοποθετηθεί στο πάτωμα της αίθουσας;

Προτεινόμενη Λύση



Για να χωρέσουν τα πλακάκια κατά μήκος του πατώματος πρέπει το α να διαιρεί το 630 και για να χωρέσουν κατά πλάτος της αίθουσας πρέπει το α να διαιρεί και το 405. Για να καλύψουμε το πάτωμα με όσο το δυνατό λιγότερα πλακάκια πρέπει το α να είναι όσο το δυνατό μεγαλύτερο. Δηλαδή πρέπει να ισούται με τον Μ.Κ.Δ των αριθμών 630 και 405.

Υπολογίζουμε:

$$630 = 2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7\,,\quad 405 = 3^4\cdot 5 \Rightarrow \alpha = \text{Μ.Κ.Δ}(630,405) = 3^2\cdot 5 = 45\,\text{cm}$$

Κατά μήκος της αίθουσας χωράει $630:45=14$ πλακάκια

Κατά πλάτος της αίθουσας χωράει $405:45=9$ πλακάκια

Άρα ο ελάχιστος αριθμός τετράγωνων πλακακιών με πλευρά φυσικό αριθμό σε cm, που μπορεί να καλύψει το πάτωμα της αίθουσας είναι $14\cdot 9=126$.

Πρόβλημα 4

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = A - \frac{1}{2}$, αν

$$A = \frac{1}{7^{-2017}+1} + \frac{1}{7^{-2016}+1} + \cdots + \frac{1}{7^{0}+1} + \cdots + \frac{1}{7^{2016}+1} + \frac{1}{7^{2017}+1}$$

Προτεινόμενη Λύση

$$A = \frac{7^{2017}}{1+7^{2017}} + \frac{7^{2016}}{1+7^{2016}} + \ldots + \frac{1}{1+1} + \ldots + \frac{1}{1+7^{2016}} + \frac{1}{1+7^{2017}}$$

$$= \left(\frac{7^{2017}}{1+7^{2017}} + \frac{1}{1+7^{2017}}\right) + \left(\frac{7^{2016}}{1+7^{2016}} + \frac{1}{1+7^{2016}}\right) + \ldots + \left(\frac{7^{1}}{1+7^{1}} + \frac{1}{1+7^{1}}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= 1+1+\ldots+1+\frac{1}{2} = 2017 + \frac{1}{2} \quad \text{τότε} \quad A = 2017 + \frac{1}{2}$$

$$B = A - \frac{1}{2} = 2017 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2017$$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2017

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 11/11/2017 *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = A - \frac{1}{2}$, αν

$$A = \frac{1}{7^{-2017}+1} + \frac{1}{7^{-2016}+1} + \cdots + \frac{1}{7^{0}+1} + \cdots + \frac{1}{7^{2016}+1} + \frac{1}{7^{2017}+1}$$

Προτεινόμενη Λύση

$$A = \frac{7^{2017}}{1+7^{2017}} + \frac{7^{2016}}{1+7^{2016}} + \ldots + \frac{1}{1+1} + \ldots + \frac{1}{1+7^{2016}} + \frac{1}{1+7^{2017}}$$

$$= \left(\frac{7^{2017}}{1+7^{2017}} + \frac{1}{1+7^{2017}}\right) + \left(\frac{7^{2016}}{1+7^{2016}} + \frac{1}{1+7^{2016}}\right) + \ldots + \left(\frac{7^{1}}{1+7^{1}} + \frac{1}{1+7^{1}}\right) + \frac{1}{2}$$

$$= 1+1+\ldots+1+\frac{1}{2} = 2017 + \frac{1}{2} \quad \text{τότε} \quad A = 2017 + \frac{1}{2}$$

$$B = A - \frac{1}{2} = 2017 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2017$$

Πρόβλημα 2

Αν $\left(2^{2^5}+1\right)\left(2^{2^4}+1\right)\left(2^{2^3}+1\right)\left(2^{2^2}+1\right)\left(2^{2^1}+1\right)\left(2^{2^0}+1\right)\left(2^{2^0}-1\right)=a^a-1$, να υπολογίσετε το a .

Προτεινόμενη Λύση

Παρατηρούμε ότι όταν πολλαπλασιάζοντας ανά δύο ξεκινώντας από το τέλος προκύπτει διαφορά δύο τετραγώνων.

$$\left(2^{2^5}+1\right)\left(2^{2^4}+1\right)\left(2^{2^3}+1\right)\left(2^{2^2}+1\right)\left(2^{2^1}+1\right)\left[\left(2^{2^0}+1\right)\left(2^{2^0}-1\right)\right]=$$

$$\left(2^{2^5}+1\right)\left(2^{2^4}+1\right)\left(2^{2^3}+1\right)\left(2^{2^2}+1\right)\left[\left(2^{2^1}+1\right)\left(2^{2^1}-1\right)\right]=$$

$$\left(2^{2^5}+1\right)\left(2^{2^4}+1\right)\left(2^{2^3}+1\right)\left[\left(2^{2^2}+1\right)\left(2^{2^2}-1\right)\right]=$$

$$\left(2^{2^5}+1\right)\left(2^{2^4}+1\right)\left[\left(2^{2^3}+1\right)\left(2^{2^3}-1\right)\right]=$$

M

$$\left(2^{2^5}+1\right)\left(2^{2^5}-1\right)=\left(2^{2^6}-1\right)$$

Τότε $2^{2^6}-1=a^a-1$ τότε $2^{64}=a^a$ τότε $16^{16}=a^a$ τότε $a=16$

Πρόβλημα 3

Τρεις φίλοι, ο Άρης, ο Ερμής και η Αθηνά πήραν μέρος σε ένα διαγωνισμό Μαθηματικού κουίζ 100 προβλημάτων. Ο Άρης και η Αθηνά έλυσαν σωστά 55 προβλήματα ο κάθε ένας και ο Ερμής έλυσε σωστά 70 προβλήματα. Με το τέλος του διαγωνισμού ένα πρόβλημα του κουίζ χαρακτηρίστηκε δύσκολο αν λύθηκε σωστά μόνο από ένα από τους πιο πάνω μαθητές και εύκολο αν λύθηκε σωστά και από τους τρεις. Να βρείτε πόσα περισσότερα ήταν τα δύσκολα προβλήματα από τα εύκολα.

Προτεινόμενη Λύση

Έστω Δ το πλήθος των προβλημάτων που λύθηκαν σωστά μόνο από ένα μαθητή, Μ το πλήθος των προβλημάτων που λύθηκαν από 2 μαθητές και Ε το πλήθος των προβλημάτων που λύθηκαν και από τους τρεις .

Τότε:

$\Delta+\mathrm{M}+\mathrm{E}=100 \quad (1)$

$1\cdot\Delta+2\cdot\mathrm{M}+3\cdot\mathrm{E}=2\times55+70 \quad (2)$

Από (1) και (2) τότε

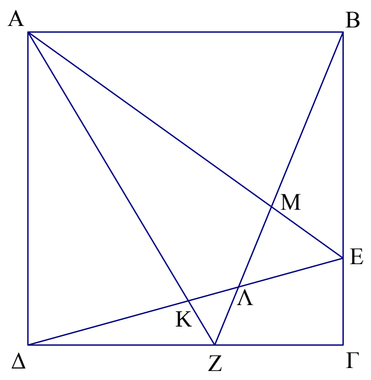
$2\left(\Delta+\mathrm{M}+\mathrm{E}\right)-\left(1\cdot\Delta+2\cdot\mathrm{M}+3\cdot\mathrm{E}\right)=2\times100-180$

$\Delta-\mathrm{E}=20$

Άρα τα δύσκολα προβλήματα είναι 20 περισσότερα από τα εύκολα.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τετράγωνο *ΑΒΓΔ*. Τα *Ε* και *Ζ* είναι σημεία των πλευρών *ΒΓ* και *ΔΓ* αντίστοιχα, *Μ* είναι το σημείο τομής των *ΑΕ* και *ΒΖ*, *Κ* είναι το σημείο τομής των *ΑΖ* και *ΔΕ* και *Λ* είναι το σημείο τομής των *ΒΖ* και *ΔΕ*. Το τετράπλευρο *ΑΚΛΜ* έχει εμβαδόν 26 cm^2 και τα τρίγωνα *ΒΕΜ* και *ΔΚΖ* έχουν εμβαδόν 10 cm^2 και 5 cm^2 αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου *ΓΕΛΖ*.



Προτεινόμενη Λύση

Στα τρίγωνα *ΑΒΖ* και *ΑΔΒ* το ύψος που αντιστοιχεί στις πλευρές του τετραγώνου *ΑΒ* και *ΑΔ* αντίστοιχα, είναι ίσο με την πλευρά του τετραγώνου.

Άρα: $\mathrm{E_{AB Z}} = \mathrm{E_{A\Delta E}} = \frac{1}{2}\mathrm{E_{AB\Gamma\Delta}} \Longrightarrow \mathrm{E_{ABZ}} + \mathrm{E_{A\Delta E}} = \mathrm{E_{AB\Gamma\Delta}}$ (1)

Αθροίζοντας τα χωρία μέσα στα τρίγωνα *ΑΒΖ* και *ΑΔΕ* βρίσκουμε:

$$\mathrm{E_{ABZ}} = \mathrm{E_{ABM}} + 26 + \mathrm{E_{K\Lambda Z}} \quad (2)$$

$$\mathrm{E_{A\Delta E}} = \mathrm{E_{A\Delta K}} + 26 + \mathrm{E_{ME\Lambda}} \quad (3)$$

Αθροίζοντας τώρα τα χωρία μέσα στο τετράγωνο *ΑΒΓΔ* βρίσκουμε:

$$\mathrm{E_{AB\Gamma\Delta}} = \mathrm{E_{A\Delta K}} + \mathrm{E_{ABM}} + 26 + 10 + 5 + \mathrm{E_{ME\Lambda}} + \mathrm{E_{K\Lambda Z}} + \mathrm{E_{\Gamma E\Lambda Z}} \quad (4)$$

Από τις (1), (2), (3) και (4) παίρνουμε:

$$\mathrm{E_{A\Delta K}} + \mathrm{E_{ABM}} + 26 + 10 + 5 + \mathrm{E_{ME\Lambda}} + \mathrm{E_{K\Lambda Z}} + \mathrm{E_{\Gamma E\Lambda Z}} = \mathrm{E_{ABM}} + 26 + \mathrm{E_{K\Lambda Z}}$$
$$+\mathrm{E_{A\Delta K}} + 26 + \mathrm{E_{ME\Lambda}}$$

Άρα: $\mathrm{E_{\Gamma E\Lambda Z}} = 26 - 15 = 11\mathrm{cm}^2$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2017

Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 11/11/2017 *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1: (α) Να απλοποιήσετε το κλάσμα

$$A=\frac{(\nu^5-10\nu^3+9\nu)(\nu^2-4)}{\nu^2+3\nu}, \qquad \nu\in\mathbb{N}$$

(β) Να αποδείξετε ότι ο A διαιρείται με το 12 για κάθε φυσικό αριθμό ν.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

(α) Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} A=\frac{(\nu^5-10\nu^3+9\nu)(\nu^2-4)}{\nu^2+3\nu}&=\frac{\nu(\nu^4-10\nu^2+9)(\nu-2)(\nu+2)}{\nu(\nu+3)} \\ &=\frac{\nu(\nu^2-9)(\nu^2-1)(\nu-2)(\nu+2)}{\nu(\nu+3)} \\ &=\frac{\nu(\nu-3)(\nu+3)(\nu-1)(\nu+1)(\nu-2)(\nu+2)}{\nu(\nu+3)} \\ &=(\nu-3)(\nu-2)(\nu-1)(\nu+1)(\nu+2). \end{aligned}$$

(β) Επειδή οι αριθμοί $(\nu-3),(\nu-2),(\nu-1)$ είναι τρείς διαδοχικοί αριθμοί δύο τουλάχιστον από αυτούς διαιρούνται με το 2 και ένας διαιρείται με το 3. Επομένως θα έχουμε ότι

$$(\nu-3)(\nu-2)(\nu-1)=\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\ \tau o\upsilon(\,2\cdot 3)=\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\ \tau o\upsilon\ 6.$$

Επίσης οι αριθμοί $(\nu+1),(\nu+2)$ είναι δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί. Επομένως ένας από αυτούς διαιρείται με το 2, δηλαδή

$$(\nu+1)(\nu+2)=\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\ \tau o\upsilon\ 2$$

Άρα,

$$(\nu-3)(\nu-2)(\nu-1)(\nu+1)(\nu+2)=\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\ \tau o\upsilon(\,6\cdot 2)=\pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\ \tau o\upsilon\ 12.$$

Πρόβλημα 2: Αν ισχύει $\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=\sqrt{2}\eta\mu x$, να αποδείξετε ότι:

(α) $\varepsilon\varphi x=\sqrt{2}-1$

(β) $\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x=\sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

(α) Από την δεδομένη σχέση

$$\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \sqrt{2}\eta\mu x$$

παρατηρούμε ότι $\sigma\upsilon\nu x \neq 0, \eta\mu x \neq 0$. Επομένως έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \sqrt{2}\eta\mu x \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x} - \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sqrt{2}\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow 1 - \varepsilon\varphi x = \sqrt{2}\,\varepsilon\varphi x \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi x = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \qquad (1)$$

(β) Από την (1) έχουμε,

$$\varepsilon\varphi x = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x.$$

<u>Πρόβλημα 3:</u> (α) Να αποδείξετε ότι οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

είναι $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ x_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(β) Δίνεται ότι: $(x^3+1)^3 = 8(2x-1),\ x \in \mathbb{R}$ (1) και $y = \sqrt[3]{2x-1}$ $y \in \mathbb{R}$ (2).

(i) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $x^3 - y^3 = 2(y-x)$.

(ii) Να βρείτε όλες τις τιμές $x \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την εξίσωση (1).

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:</u>

(α) Η εξίσωση $x^3 - 2x + 1 = 0$ γράφεται

$$x^3 - 2x + 1 = x^3 - x - x + 1 = x(x^2-1) - (x-1) = x(x-1)(x+1) - (x-1)$$
$$= (x-1)[x(x+1)-1] = (x-1)(x^2+x-1)$$

Άρα ,

$$(x-1)(x^2+x-1) = 0 \Longrightarrow x_1 = 1, \qquad x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \qquad x_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

(β) (i) Από τις (1) $\kappa\alpha\iota$ (2) έχουμε $(x^3+1)^3 = 8y^3 \Leftrightarrow x^3 + 1 = 2y$ και

$$y^3 = 2x - 1 \Leftrightarrow y^3 + 1 = 2x.$$

Αφαιρώντας τις τελευταίες εξισώσεις θα έχουμε

$$x^3 - y^3 = 2(y-x).$$

(ii) Από την εξίσωση $x^3 - y^3 = 2(y-x)$ παίρνουμε

$$x^3 - y^3 = 2(y-x) \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2) + 2(x-y) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-y)(x^2+xy+y^2+2) = 0$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

- Αν $x = y$, τότε η εξίσωση $(x^3+1)^3 = 8y^3$ γράφεται $x^3 + 1 = 2x \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$ $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ x_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
- Για τον παράγοντα $x^2 + xy + y^2 + 2$ έχουμε

$$x^2 + xy + y^2 + 2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 > 0$$

Επομένως οι ρίζες της (1) είναι $x_1,\ x_2,\ x_3$.

<u>Πρόβλημα 4:</u> Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Έστω σημείο M πάνω στην πλευρά $B\Gamma$ του τετραγώνου. Η διχοτόμος της γωνίας $\angle\Delta AM$ τέμνει την πλευρά $\Delta\Gamma$ στο σημείο N. Από το σημείο N φέρουμε κάθετη ευθεία προς την AM η οποία τέμνει την ευθεία AB στο σημείο H. Να αποδείξετε ότι $AH = BM + \Delta N$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

Αφού η AN είναι διχοτόμος της $\angle \Delta AN$ και από την υπόθεση $N\Delta \perp A\Delta, NZ \perp AM$, θα έχουμε ότι

$$\Delta N = NZ \quad (1)$$

Από την ισότητα των τριγώνων $\triangle A\Delta N, \triangle ANZ$ παίρνουμε ότι

$A\Delta = AZ$ και άρα $AB = A\Delta = AZ \quad (2)$

Επίσης

$$\begin{cases} \angle AMB = 90° - \angle MAB \\ \angle ZHA = 90° - \angle MAB \end{cases} \Rightarrow \angle AMB = \angle ZHA \quad (3)$$

Από τις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AMB$ $\kappa\alpha\iota$ $\triangle AZH$ είναι ίσα. Επομένως

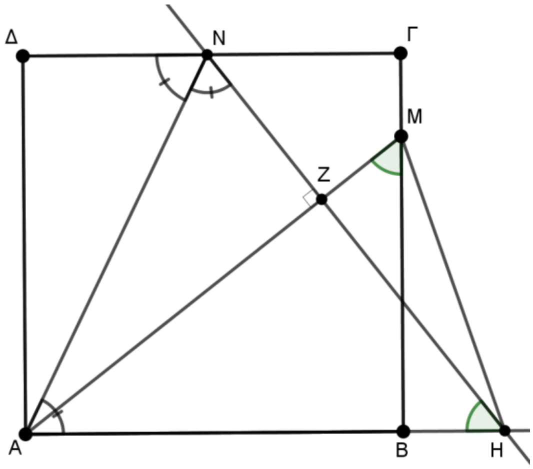
$$ZH = BM \quad (4)$$

Όμως το τρίγωνο $\triangle ANH$ είναι ισοσκελές, αφού

$$\begin{cases} \angle ANH = \angle \Delta NA = 90° - \angle \Delta AN \\ \angle NAH = 90° - \angle \Delta AN \end{cases} \Rightarrow \angle ANH = \angle NAH \quad (5)$$

Επομένως θα έχουμε

$$AH = HN = HZ + ZN = BM + \Delta N.$$



	ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ **ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ** **ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2017** **Β' ΛΥΚΕΙΟΥ** *Ημερομηνία: 11/11/2017* *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1: Αν ισχύει $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \sqrt{2}\eta\mu x$, να αποδείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

Από την δεδομένη σχέση

$$\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \sqrt{2}\eta\mu x$$

παρατηρούμε ότι $\sigma\upsilon\nu x \neq 0, \eta\mu x \neq 0$. Επομένως έχουμε

$$\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \sqrt{2}\eta\mu x \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x} - \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{\sqrt{2}\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \Leftrightarrow 1 - \varepsilon\varphi x = \sqrt{2}\ \varepsilon\varphi x \Leftrightarrow$$

$$\varepsilon\varphi x = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \qquad (1)$$

Από την (1) έχουμε,

$$\varepsilon\varphi x = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow \eta\mu x = \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x = \sqrt{2}\sigma\upsilon\nu x.$$

Πρόβλημα 2: (α) Να αποδείξετε ότι οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης

$$x^3 - 2x + 1 = 0$$

είναι $x_1 = 1,\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ x_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

(β) Δίνεται ότι: $(x^3+1)^3 = 8(2x-1),\ x \in \mathbb{R}$ (1) και $y = \sqrt[3]{2x-1}$ $y \in \mathbb{R}$ (2).

(i) Να αποδείξετε ότι ισχύει: $x^3 - y^3 = 2(y-x)$.

(ii) Να βρείτε όλες τις τιμές $x \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την εξίσωση (1).

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

(α) Η εξίσωση $x^3 - 2x + 1 = 0$ γράφεται

$$x^3 - 2x + 1 = x^3 - x - x + 1 = x(x^2-1) - (x-1) = x(x-1)(x+1) - (x-1)$$
$$= (x-1)[x(x+1)-1] = (x-1)(x^2+x-1)$$

Άρα ,

$$(x-1)(x^2+x-1)=0 \Longrightarrow x_1=1, \qquad x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \qquad x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

(β) (i) Από τις (1) $και$ (2) έχουμε $(x^3+1)^3=8y^3 \Leftrightarrow x^3+1=2y$ και

$$y^3=2x-1 \Leftrightarrow y^3+1=2x.$$

Αφαιρώντας τις τελευταίες εξισώσεις θα έχουμε

$$x^3-y^3=2(y-x).$$

(ii) Από την εξίσωση $x^3-y^3=2(y-x)$ παίρνουμε

$$x^3-y^3=2(y-x) \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2)+2(x-y)=0 \Leftrightarrow$$
$$(x-y)(x^2+xy+y^2+2)=0$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις

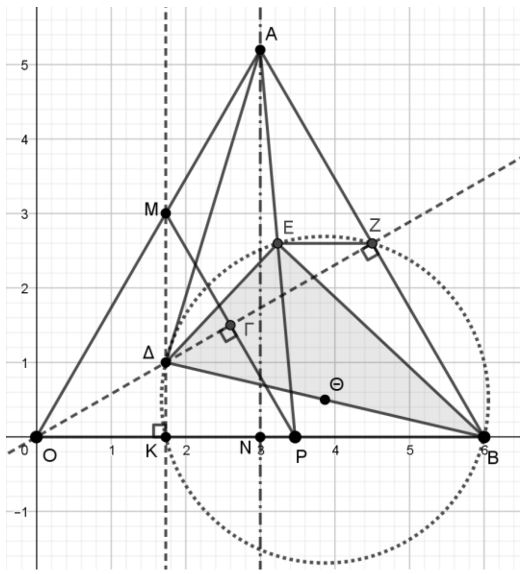
- Αν $x=y$, τότε η εξίσωση $(x^3+1)^3=8y^3$ γράφεται $x^3+1=2x \Leftrightarrow x^3-2x+1=0 \Leftrightarrow$ $x_1=1,\ x_2=\frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
- Για τον παράγοντα x^2+xy+y^2+2 έχουμε

$$x^2+xy+y^2+2=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+2>0$$

Επομένως οι ρίζες της (1) είναι $x_1,\ x_2,\ x_3$.

<u>**Πρόβλημα 3:**</u> Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο $\varDelta OAB$ με $B(6,0)$, όπου O η αρχή των αξόνων και A στο $1^{\text{ο}}$ τεταρτημόριο. Από τυχαίο σημείο $P(2\rho,0)$ της πλευράς OB $(0<\rho<3)$ φέρουμε παράλληλη προς την BA, που τέμνει την πλευρά OA στο σημείο M. Αν $\varDelta$ είναι το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου $\varDelta OMP$ και E το μέσον του AP, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\varDelta B\varDelta E$.

<u>**ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:**</u>



Έστω N το μέσον του OB και Z το μέσον του AB. Αφού το τρίγωνο $\varDelta AOB$ είναι ισοσκελές έχουμε

$$AE^2=OA^2-ON^2=6^2-3^2=27 \Longrightarrow AN=3\sqrt{3}$$

Επομένως οι συντεταγμένες του A είναι $A\left(3{,}3\sqrt{3}\right)$. και οι συντεταγμένες του E είναι

$$E\left(\frac{3+2\rho}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

Το τρίγωνο $\varDelta OMP$ είναι ισόπλευρο και έστω K το μέσον του OP. Έχουμε

$$MK^2=OM^2-OK^2=4\rho^2-\rho^2=3\rho^2 \Rightarrow$$
$$MK=\rho\sqrt{3}$$

Αφού το σημείο $\varDelta$ είναι το σημείο τομής των διαμέσων του $\varDelta OMP$ θα έχουμε

$$\varDelta K=\frac{1}{3}MK=\frac{\rho\sqrt{3}}{3}$$

Άρα

$$\varDelta\left(\rho,\frac{\rho\sqrt{3}}{3}\right)$$

Για τις κλίσεις των ευθειών $\varDelta E, BE$ θα έχουμε

$$\lambda_{\varDelta E}=\frac{\frac{\rho\sqrt{3}}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\rho-\frac{3+2\rho}{2}}=-\frac{\sqrt{3}(2\rho-9)}{9}$$

και

$$\lambda_{EB} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3+2\rho}{2} - 6} = \frac{3\sqrt{3}}{2\rho - 9} = \frac{9}{\sqrt{3}(2\rho - 9)}$$

Επομένως

$$\lambda_{\Delta E} \cdot \lambda_{EB} = -1 \Rightarrow \Delta E \perp EB \Rightarrow \angle \Delta EB = 90°.$$

Επίσης έχουμε ότι το τρίγωνο $\triangle \Delta ZB$ είναι ορθογώνιο στο Z. Αν Θ το μέσον της υποτείνουσας ΔB συμπεραίνουμε ότι $\Theta Z = \Theta E = \Theta \Delta = \Theta B$. Άρα τα σημεία Δ, E, Z, B βρίσκονται πάνω σε κύκλο με κέντρο Θ και ακτίνα ΘZ.
Επειδή τα σημεία E, Z είναι μέσα των τμημάτων AP, AB αντίστοιχα θα έχουμε ότι $EZ \parallel OB$.
Επομένως,

$$\angle EZ\Delta = \angle EZO = 30°$$

Όμως

$$\angle EZ\Delta = \angle EB\Delta \text{ (εγγεγραμμένες γωνίες στο ίδιο τόξο)}$$

Επομένως, $\angle EB\Delta = 30°$ και $\angle E\Delta B = 60°$.

<u>Πρόβλημα 4:</u> Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με πλευρές $AB = \gamma, B\Gamma = \alpha, \Gamma A = \beta$ και $\alpha < \beta < \gamma$.
(ι) Να αποδείξετε ότι $\angle A < 60^0$.
(ιι) Αν μ είναι το μήκος της διαμέσου $A\Delta$, να αποδείξετε ότι $4\mu^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$.
(ιιι) Να αποδείξετε ότι $\mu^2 > \frac{3\beta\gamma}{4}$.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:</u>
(ι) Από την ανισότητα $\alpha < \beta < \gamma$ θα έχουμε

$$\alpha < \beta < \gamma \Rightarrow \angle A < \angle B < \angle \Gamma$$

Άρα

$$\begin{cases} \angle A < \angle B \\ \angle A < \angle \Gamma \end{cases}$$

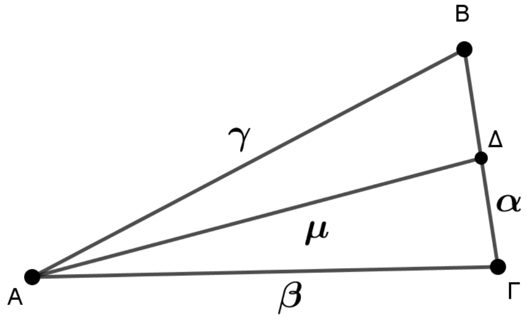
Προσθέτοντας τις δύο ανισότητες θα έχουμε

$$2(\angle A) < \angle B + \angle \Gamma = 180° - \angle A \Rightarrow 3(\angle A) < 180° \Rightarrow \angle A < 60^0.$$

(ιι) Εφαρμόζοντας τον νόμο των συνημιτόνων στα τρίγωνα $\triangle A\Delta\Gamma$ και $\triangle A\Delta B$ θα έχουμε

$$\mu^2 = \beta^2 + \frac{\alpha^2}{4} - 2\frac{\alpha\beta}{2}\sigma\upsilon\nu\Gamma$$

$$\mu^2 = \gamma^2 + \frac{\alpha^2}{4} - 2\frac{\alpha\gamma}{2}\sigma\upsilon\nu B$$



Προσθέτοντας, παίρνουμε

$$2\mu^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \alpha(\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma + \gamma\sigma\upsilon\nu B)$$

Στην τελευταία εξίσωση εφαρμόζουμε τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο$\triangle AB\Gamma$. Έχουμε

$$2\mu^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \alpha\left(\beta\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta} + \gamma\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}\right) \Leftrightarrow 2\mu^2 = \beta^2 + \gamma^2 + \frac{\alpha^2}{2} - \alpha^2$$

$$\Leftrightarrow 4\mu^2 = 2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2 \Leftrightarrow 4\mu^2 = 2\beta^2 + 2\gamma^2 - (\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A) \Leftrightarrow$$

$$4\mu^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$$

(ιιι) Επειδή $\angle A < 60^0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu A > \frac{1}{2}$, επομένως από την προηγούμενη σχέση θα έχουμε

$$\mu^2 > \frac{\beta^2}{4} + \frac{\gamma^2}{4} + 2\beta\gamma\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\mu^2 > \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma$$

επίσης ισχύει

$$\beta^2 + \gamma^2 > 2\beta\gamma \quad (\beta \neq \gamma)$$

Άρα ,

$$4\mu^2 > \beta^2 + \gamma^2 + \beta\gamma > 2\beta\gamma + \beta\gamma \Leftrightarrow 4\mu^2 > 3\beta\gamma \Leftrightarrow \mu^2 > \frac{3\beta\gamma}{4}.$$

ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
ΕΠΑΡΧΙΑΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2017

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 11/11/2017 *Ώρα Εξέτασης: 10:00-12:00*

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να λύσετε όλα τα θέματα, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
2. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.
3. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Πρόβλημα 1: (α) Στην ακολουθία $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\nu, \dots$ είναι $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$ και ισχύει

$$\alpha_{\nu+1} - 2\alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} = 2\,, \qquad \forall \nu \in \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Να αποδείξετε ότι: $\alpha_\nu = \nu^2$, $\forall \nu \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

(β) Να αποδείξετε ότι: $\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 4, για κάθε $\nu \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

(α) Έχουμε

$$\alpha_0 = 0 = 0^2$$
$$\alpha_1 = 1 = 1^2$$
$$\gamma\iota\alpha\ \ \nu = 1:\ \alpha_2 - 2\alpha_1 + \alpha_0 = 2\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \ \alpha_2 = 4 = 2^2$$
$$\gamma\iota\alpha\ \ \nu = 2:\ \alpha_3 - 2\alpha_2 + \alpha_1 = 2\ \tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \ \alpha_3 = 9 = 3^2$$
$$\vdots$$

Υποθέτουμε ότι $\alpha_\nu = \nu^2$, $\forall \nu \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ και θα το αποδείξουμε επαγωγικά.

Έστω ότι

$$\alpha_\nu = \nu^2 \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha_{\nu-1} = (\nu - 1)^2$$

τότε, έχουμε

$$\alpha_{\nu+1} - 2\alpha_\nu + \alpha_{\nu-1} = 2 \Leftrightarrow \alpha_{\nu+1} = 2 + 2\nu^2 - (\nu - 1)^2 = 2 + 2\nu^2 - \nu^2 + 2\nu - 1 \Leftrightarrow$$
$$\alpha_{\nu+1} = \nu^2 + 2\nu + 1 = (\nu + 1)^2$$

Επομένως, $\alpha_\nu = \nu^2$, $\forall \nu \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

(β) Θα έχουμε

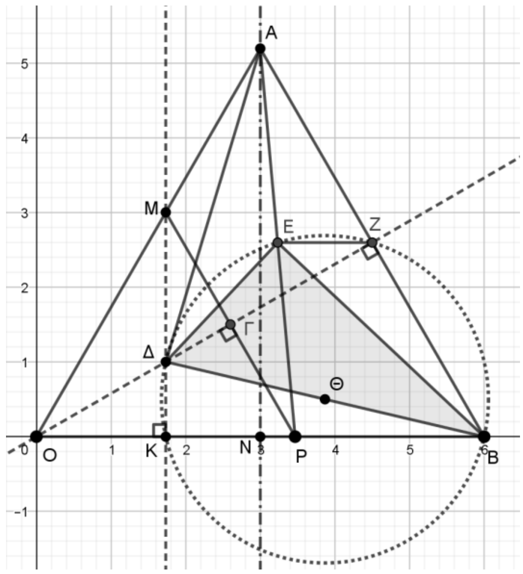
$$\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu - 1 = (\nu + 1)^2 + \nu^2 - 1 = 2\nu^2 + 2\nu = 2\nu(\nu + 1)$$

Όμως το γινόμενο $\nu(\nu + 1)$ διαιρείται με το 2 ως γινόμενο διαδοχικών φυσικών αριθμών.

Επομένως, $\alpha_{\nu+1} + \alpha_\nu - 1 = \pi o\lambda\lambda\alpha\pi\lambda\acute{\alpha}\sigma\iota o\ \tau o\upsilon$ 4.

Πρόβλημα 2: Σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο $\varDelta OAB$ με $B(6, 0)$, όπου O η αρχή των αξόνων και A στο 1ο τεταρτημόριο. Από τυχαίο σημείο $P(2\rho, 0)$ της πλευράς OB $(0 < \rho < 3)$ φέρουμε παράλληλη προς την BA, που τέμνει την πλευρά OA στο σημείο M. Αν $\varDelta$ είναι το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου $\varDelta OMP$ και E το μέσον του AP, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\varDelta B\varDelta E$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:



Έστω N το μέσον του OB και Z το μέσον του AB. Αφού το τρίγωνο $\varDelta AOB$ είναι ισοσκελές έχουμε

$$AE^2 = OA^2 - ON^2 = 6^2 - 3^2 = 27 \Longrightarrow AN = 3\sqrt{3}$$

Επομένως οι συντεταγμένες του A είναι $A(3,3\sqrt{3})$. και οι συντεταγμένες του E είναι

$$E\left(\frac{3+2\rho}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$$

Το τρίγωνο $\varDelta OMP$ είναι ισόπλευρο και έστω K το μέσον του OP. Έχουμε

$$MK^2 = OM^2 - OK^2 = 4\rho^2 - \rho^2 = 3\rho^2 \Rightarrow$$
$$MK = \rho\sqrt{3}$$

Αφού το σημείο $\varDelta$ είναι το σημείο τομής των διαμέσων του $\varDelta OMP$ θα έχουμε

$$\varDelta K = \frac{1}{3}MK = \frac{\rho\sqrt{3}}{3}$$

Άρα

$$\varDelta\left(\rho,\frac{\rho\sqrt{3}}{3}\right)$$

Για τις κλίσεις των ευθειών $\varDelta E, BE$ θα έχουμε

$$\lambda_{\varDelta E} = \frac{\frac{\rho\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{\rho - \frac{3+2\rho}{2}} = -\frac{\sqrt{3}(2\rho-9)}{9}$$

και

$$\lambda_{EB} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{\frac{3+2\rho}{2} - 6} = \frac{3\sqrt{3}}{2\rho-9} = \frac{9}{\sqrt{3}(2\rho-9)}$$

Επομένως

$$\lambda_{\varDelta E}\cdot\lambda_{EB} = -1 \Longrightarrow \varDelta E \perp EB \Longrightarrow \angle \varDelta EB = 90°.$$

Επίσης έχουμε ότι το τρίγωνο $\varDelta\varDelta ZB$ είναι ορθογώνιο στο Z. Αν Θ το μέσον της υποτείνουσας $\varDelta B$ συμπεραίνουμε ότι $\Theta Z = \Theta E = \Theta\varDelta = \Theta B$. Άρα τα σημεία $\varDelta, E, Z, B$ βρίσκονται πάνω σε κύκλο με κέντρο Θ και ακτίνα ΘZ.

Επειδή τα σημεία E, Z είναι μέσα των τμημάτων AP, AB αντίστοιχα θα έχουμε ότι $EZ \parallel OB$. Επομένως,

$$\angle EZ\varDelta = \angle EZO = 30°$$

Όμως

$$\angle EZ\varDelta = \angle EB\varDelta \text{ (εγγεγραμμένες γωνίες στο ίδιο τόξο)}$$

Επομένως, $\angle EB\varDelta = 30°$ και $\angle E\varDelta B = 60°$.

Πρόβλημα 3: Έστω συνάρτηση $f\colon[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- Συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
- Δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f''(x) > 0,\ \forall x \in (\alpha,\beta)$
- $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\rho \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(\rho) = 0$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:

Από το θεώρημα του *Bolzano* υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\rho) = 0$. Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα υποθέτουμε ότι υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 \in (\alpha,\beta)$ με

$$\alpha < \rho_1 < \rho_2 < \beta \qquad \kappa\alpha\iota \quad f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0.$$

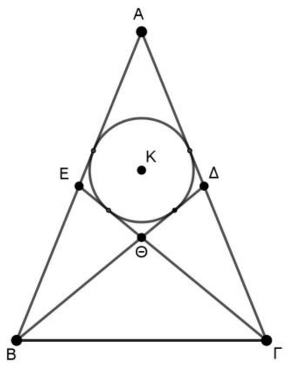
Για την συνάρτηση f ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος της Μέσης τιμής στα διαστήματα $[\alpha, \rho_1]$ και $[\rho_1, \rho_2]$. Επομένως έχουμε

- Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\alpha, \rho_1)$ τέτοιο ώστε
$$f'(\xi_1) = \frac{f(\rho_1) - f(a)}{\rho_1 - a} = -\frac{f(a)}{\rho_1 - a}$$
και αφού από την υπόθεση $f(\alpha) < 0$, θα έχουμε
$$f'(\xi_1) > 0$$
- Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\rho_{1,}\rho_2)$ τέτοιο ώστε
$$f'(\xi_2) = \frac{f(\rho_2) - f(\rho_1)}{\rho_2 - \rho_1} = 0$$

Άρα,
$$\mu\varepsilon \ \xi_1 < \xi_2 \ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon \ f'(\xi_1) > f'(\xi_2)$$
αυτό όμως είναι άτοπο αφού από την υπόθεση $f''(x) > 0$, $\forall x \in (\alpha, \beta)$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f' είναι αύξουσα στο (α, β), δηλαδή
$$\forall x_1, x_2 \in (\alpha, \beta) \ \mu\varepsilon \ x_1 < x_2 \ \acute{\varepsilon}\chi o\upsilon\mu\varepsilon \ f'(x_1) \le f'(x_2).$$

<u>Πρόβλημα 4:</u> Οι διάμεσοι $B\Delta, \Gamma E$ τριγώνου $\Delta AB\Gamma$ τέμνονται στο σημείο Θ. Να αποδείξετε ότι: Το τετράπλευρο $AE\Theta\Delta$ είναι περιγράψιμο, αν και μόνον αν $AB = A\Gamma$.

<u>ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΗ ΛΥΣΗ:</u>



($\Longleftarrow$) Υποθέτουμε ότι $AB = A\Gamma$. Τότε αφού το τρίγωνο είναι ισοσκελές θα έχουμε
$$AE = A\Delta \quad (1)$$
Επίσης,
$$B\Delta = \Gamma E \Rightarrow \Theta\Delta = \Theta E \ \ (2)$$
Από τις (1), (2) παίρνουμε
$$AE + \Theta\Delta = A\Delta + \Theta E$$
Άρα, το τετράπλευρο $AE\Theta\Delta$ είναι περιγράψιμο.

($\Longrightarrow$) Έστω ότι το τετράπλευρο $AE\Theta\Delta$ είναι περιγράψιμο, τότε
$$AE + \Theta\Delta = A\Delta + \Theta E \quad (3)$$
Αν ονομάσουμε $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$, $B\Delta = \mu_\beta$, $\Gamma E = \mu_\gamma$
η (3) γίνεται
$$\frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{3}\mu_\beta = \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{3}\mu_\gamma \quad (4)$$
Επίσης θα έχουμε
$$E = E_{AB\Delta} = E_{A\Gamma E} = \frac{1}{2}E_{AB\Gamma}$$
και αφού έχουν τα τρίγωνα $\Delta AB\Delta, \Delta A\Gamma E$ έχουν τον ίδιο εγγεγραμμένο κύκλο ακτίνας έστω ρ, θα έχουμε,
$$E = \tau_1\rho \quad \kappa\alpha\iota \ \ E = \tau_2\rho$$
όπου τ_1, τ_2 είναι οι ημιπερίμετρος των τριγώνων $\Delta AB\Delta, \Delta A\Gamma E$ αντίστοιχα. Επομένως θα έχουμε $\tau_1 = \tau_2$. Άρα
$$A\Delta + \Delta B + AB = AE + E\Gamma + \Gamma A \Longrightarrow \frac{1}{2}\beta + \mu_\beta + \gamma = \frac{1}{2}\gamma + \mu_\gamma + \beta \Longrightarrow$$
$$\frac{1}{2}\gamma + \mu_\beta = \frac{1}{2}\beta + \mu_\gamma \qquad (5)$$
Αφαιρώντας τις (4), (5) παίρνουμε
$$\frac{2}{3}\mu_\beta = \frac{2}{3}\mu_\gamma \Longrightarrow \mu_\beta = \mu_\gamma \Longrightarrow \beta = \gamma \Longrightarrow AB = A\Gamma.$$